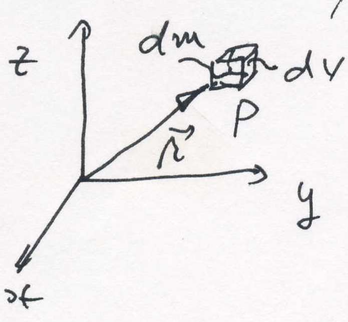
3. NOȚIUNI DE MECANICA FLUIDELOR

Prin fluid înțelegem un mediu (corp) de dimensiuni macroscopice care opune o rezistență nesemnificativă la schimbarea de formă și volum. Din punct de vedere teoretic un fluid poate fi considerat un mediu continuu. Mecanica fluidelor studiază fluidele la nivel macroscopic fără a ține seama de mișcarea constituienților fundamentali ai acestuia. Astfel se introduce noțiunea de particulă de fluid sau punct de fluid (în sens abstract) care reprezintă un element de volum considerat din punct de vedere matematic infinitezimal, dar care este suficient de mare din punct de vedere fizic astfel încât să conțină un număr foarte mare de molecule însă suficient de mic în raport cu volumul macroscopic al fluidului analizat.

Fiind un mediu continuu are sens introducerea noțiunii de densitate. Alegând un element de volum infinitezimal dV, acesta va conține o cantitate de fluid având masa dm. Definim densitatea într-un punct P prin



$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad (1)$$

În general densitatea poate fi diferită de la un punct la altul al fluidului și de asemenea se poate modifica în timp, $\rho = \rho(\vec{r}, t) = \rho(x, y, z, t)$. Așadar densitatea în fluide este un câmp scalar.

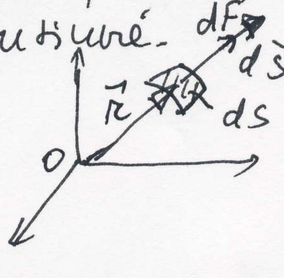
Există două metode de studiu al mișcării fluidelor. În abordarea lui Lagrange particula de fluid, elementul de volum dV se urmărește în mișcarea sa. O a doua abordare privește comportarea fluidului „într-un punct" (element de volum infinitezimal) fixat în spațiu în care o particulă de fluid se află la un moment dat. Astfel putem introduce noțiunea de câmp vectorial al vitezelor $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \equiv \vec{v}(x, y, z, t)$, care reprezintă viteza fluidului într-un punct precizat din spațiu ($\vec{r}$) la un moment de timp dat (t). Această metodă de studiu al fluidelor este metoda lui Euler.

În continuare vom utiliza această a doua modalitate de abordare.

În cadrul fluidelor pot fi considerate lichidele, gazele și plasma (conține particule încărcate electric).

Fluidele pot fi împărțite în două categorii din punctul de vedere al interacțiilor interne.

- Fluide ideale în care interacțiile interne se reduc doar la forțe perpendiculare pe o suprafață limitată în interiorul acestuia. În acest caz forțele interne se limitează la forțe de presiune.



$$p = \frac{dF}{dS} \qquad (2)$$

unde dS este aria suprafeței elementare precizate. Orientarea acestei suprafețe este determinată de orientarea vectorului suprafață $d\vec{S}$.

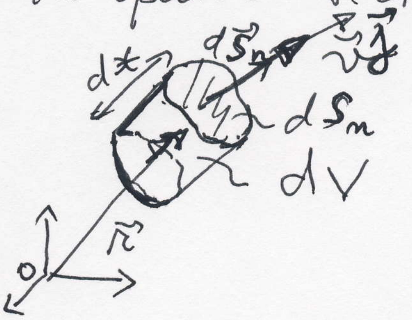
Așadar în descrierea fluidelor introducem noțiunea de câmp scalar de presiune $p = p(\vec{r}, t) = p(x, y, z, t)$.

- Fluidele reale (vâscoase) sunt fluidele în care se iau în considerație și frecările, adică forțele tangențiale între două straturi de fluid aflate în mișcare relativă (sau în tendință de mișcare relativă). Vom vedea că în acest caz trebuie introduse forțele tangențiale de vâscozitate.

observaţie: Forţele interne din fluide (ce descriu interacţiunile interne) sunt o consecinţa a aplicării la fluide a principiului III al mecanicii newtoniene.

3.1. Ecuaţia de continuitate

Este o expresie a conservării masei în mecanica clasică. Să presupunem că avem un punct în fluid în care cunoaştem valorile câmpului densităţii ρ şi al câmpului vitezelor $\vec{v}$. Considerăm o suprafaţă elementară $d\vec{S}$ perpendiculară pe $\vec{v}$ (de fapt din descrierea suprafeţelor în spaţiu vectorul $d\vec{S}$ este paralel cu $\vec{v}$.



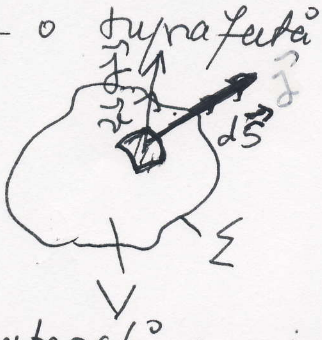
Definim densitatea de curent de masă $\vec{j}$, cantitatea de lichid ce trece prin unitatea de suprafaţă ~~ds~~ în unitatea de timp.

$$|\vec{j}| = \frac{dm}{dS\,dt} = \frac{\rho\, dV}{dS\,dt} = \frac{\rho\, dx\cdot dS}{dS\,dt} = \rho\frac{dx}{dt} = \rho v$$

obţinem pentru vectorul densitate de curent de masă, ţinând cont şi de orientarea acestuia

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \qquad (3)$$

Fie acum un volum finit (V) din fluid mărginit de o suprafaţă Σ. Notăm cu m masa conţinută la momentul t în V.



$$m_{(t)} = \iiint_V dm = \iiint_V \rho(\vec{r},t)\,dV \qquad (4)$$

Variaţia în timp a masei din V, datorată conservării masei, se regăseşte în masa care trece (intră sau iese) prin suprafaţa Σ în intervalul de timp considerat.

$$\frac{dm}{dt} = -\oint_{\Sigma} \vec{j}\cdot d\vec{S} \qquad (5)$$

Semnul „-" arată că dacă $\vec{j}$ este orientat spre exterior masa m scade (evident)

Din (4) și (5) avem

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho(\vec{r},t)\,dV = -\oiint_\Sigma \vec{j}\,d\vec{S} \qquad (6)$$

Folosim teorema Green-Gauss-Ostrogradski

$$\oiint_\Sigma \vec{j}\,d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{j}\,dV \;,\quad \nabla\cdot\vec{j} = \operatorname{div}\vec{j} \qquad (7)$$

și din (6) obținem

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV = \iiint_V (-\nabla\cdot\vec{j})\,dV \qquad (8)$$

De unde

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\vec{j} \iff \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \;,\quad \vec{j} = \rho\vec{v} \qquad (9)$$

Ultima ecuație poartă numele de ecuație de continuitate (sub formă locală) și după cum am mai spus exprimă conservarea masei.

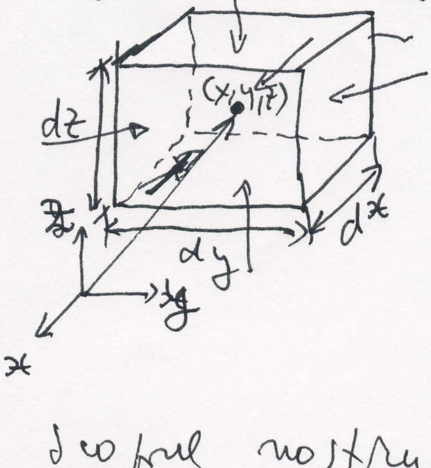
3.2. Dinamica fluidelor ideale

3.2.1. Ecuația de mișcare a lui Euler

Pentru început vom determina forțele ce acționează asupra unui element de volum dV (însemnând asupra particulei de lichid) din punctul P, ~~plasat~~ de vectorul de poziție $\vec{r}$.

- Forțele de presiune (interne)

Considerăm elementul de volum în coordonate carteziene:



$$dV = dx\,dy\,dz \qquad (10)$$

Forțele de presiune se vor exercita pe cele 6 fețe ale paralelipipedului perpendicular pe acestea spre interior. Considerăm paralelipipedul centrat pe punctul $\vec{r} \equiv (x,y,z)$

Scopul nostru este de a determina forța rezultantă ce se exercită asupra lui dV datorită presiunilor interne.

Determinăm această forță prin componentele sale carteziene

$$\delta\vec{f}_p = \delta f_x \vec{i} + \delta f_y \vec{j} + \delta f_z \vec{k} \qquad (11)$$

$$\delta f_x = -p\left(x+\frac{dx}{2}, y, z\right)dy\,dz + p\left(x-\frac{dx}{2}, y, z\right)dy\,dz$$

$$= dy\,dz\left(-p(x,y,z) - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} + p(x,y,z) + \frac{\partial p}{\partial x}\left(-\frac{dx}{2}\right)\right)$$

$$\delta f_x = -dy\,dz\,dx\,\frac{\partial p}{\partial x} = -dV\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (12)$$

Analog obținem

$$\delta f_y = -\frac{\partial p}{\partial y}dV \quad , \quad df_z = -\frac{\partial p}{\partial z}dV \qquad (13)$$

Introducem (12) și (13) în (11)

$$\delta\vec{f}_p = -dV\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{k}\right) \equiv -dV\cdot\nabla p \qquad (14)$$

$$\delta\vec{f}_p = -\nabla p\cdot dV \quad , \quad \nabla p = \mathrm{grad}\,p \qquad (15)$$

- Forțe externe. Presupunem fluidul aflat într-un câmp de forțe externe, pentru care putem defini densitatea acestuia. Evident astfel de forțe depind de volumul fluidului.

Vom nota cu $\vec{f}$ densitatea volumică de forță adică $\vec{f}_V = \dfrac{\delta\vec{f}_e}{dV}$, de unde

$$\delta\vec{f}_e = \vec{f}_V dV \text{ sau } \delta\vec{f}_e = \vec{f}dm, \ \vec{f}\text{-densitate de masă} \qquad (16)$$

Astfel de forțe volumice externe exercitate în fluide sunt cel mai adesea evident forțele gravitaționale.

Considerăm acum elementul de volum dV a cărui masă este dm și aplicăm pentru a descrie dinamica în fluide principiul II al mecanicii newtoniene.

$$dm\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \delta\vec{f}_p + \delta\vec{f}_e \qquad (17)$$

sau utilizând (15) și (16)

$$dm\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p\,dV + \vec{f}\,dm \qquad (18)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p \frac{dV}{dm} + \vec{f} \quad , \quad \frac{dm}{dV} = \rho$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \tag{19}$$

Dar

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{i}\frac{d}{dt}v_x(x,y,z,t) + \vec{j}\frac{d}{dt}v_y(x,y,z,t) + \vec{k}\frac{d}{dt}v_z(x,y,z,t)$$

Determinăm această expresie pe componente (20)

$$\frac{d}{dt}v_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}v_y = \frac{\partial v_y}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}v_z = \frac{\partial v_z}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \tag{23}$$

Ultimele relații le introducem în (20) și obținem ($\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, $\dot{z} = v_z$)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{j}\frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{k}\frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{i}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) +$$

$$+ \vec{j}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{i}\,v_x) + (\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{j}\,v_y) + (\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{k}\,v_z)$$

și în final

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \tag{24}$$

Introducem (24) în (19) și obținem

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \tag{25}$$

Ultima ecuație vectorială reprezintă ecuația lui Euler de mișcare. Ea este echivalentă cu următoarele trei ecuații carteziene

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f_x \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + f_y \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + f_z \end{cases} \tag{26}$$

Obs. Ecuațiile de mișcare ale fluidului sunt ecuații neliniare.

În condiții externe date $\vec{f}$ cunoscut rezolvarea acestor ecuații presupune determinarea funcțiilor $p(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$, $[v_x(\vec{r},t), v_y(\vec{r},t), v_z(\vec{r},t)] \Leftrightarrow \vec{v}(\vec{r},t)$.

Dar ecuația lui Euler este un sistem de trei ecuații diferențiale (neliniare) cu derivate parțiale.

În plus se se poate adăuga ecuația de continuitate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (27)$$

Mai lipsește o ecuație. Aceasta este de regulă „supranumită" din termodinamică și este o legătură între p și ρ. De exemplu ecuația termică de stare a gazelor. Dar aceasta implică și temperatura. Așadar trebuie dat câmpul temperaturilor. Dacă nu se face uz și de alte ecuații termodinamice (se folosește de exemplu principiul I al termodinamicii).

3.2.2. **Clasificarea regimurilor de curgere**

- **Curgerea staționară** câmpurile ρ, p și $\vec{v}$ nu depind de timp (explicit)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

În acest caz ecuația Euler se scrie

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \quad (27)$$

iar ecuația de continuitate

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (28)$$

Fluidele incompresibile

În cazul în care fluidul are și densitate constantă ecuația de continuitate devine

$$\rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{adică} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (29)$$

- **Curgerea nestaționară** are loc atunci când câmpurile ρ, p, $\vec{v}$ depind explicit de timp

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$$

Ecuația lui Euler mai poate fi pusă și sub o altă formă. Pentru aceasta ne reamintim relația

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$

Alegem $\vec{A}=\vec{B}=\vec{v}$ și obținem

$$\nabla(\vec{v}^2) = 2\,\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) + 2(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

de unde obținem

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{v}^2) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) \qquad (30)$$

Utilizând (30) în ecuația lui Euler (25) aceasta devine

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\vec{v}^2 - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \qquad (31)$$

Putem face acum o nouă clasificare:

- **curgere laminară** (irotațională) dacă

$$\nabla\times\vec{v} = 0 \Leftrightarrow rot\,\vec{v} = 0 \qquad (32)$$

- **curgere turbionară** (rotațională) dacă

$$\nabla\times\vec{v} \neq 0 \Leftrightarrow rot\,\vec{v} \neq 0 \qquad (33)$$

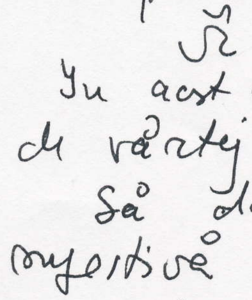
Se ~~poate~~ poate defini turbionarea

$$\vec{\Omega} = \nabla\times\vec{v} \qquad (34)$$

In acest caz se pot defini de asemenea liniile de vârtej care sunt mereu tangente la $\vec{\Omega}$

Să dăm în continuare o semnificație mai sugestivă lui $\vec{\Omega}$. Să presupunem că avem o mișcare circulară cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$

Am văzut că $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$, $\vec{\omega} = const.$



Determinăm turbionarea în acest caz particular

$$\vec{\Omega} \overset{(34)}{=} -\nabla\times(\vec{r}\times\vec{\omega}) = \nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{r} - (\vec{\omega}\cdot\nabla)\,\vec{r}$$

Dar $\nabla\cdot\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

$$(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{r} = \left(\omega_x\frac{\partial}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) =$$

$= \vec{i}\,\omega_x + \vec{j}\,\omega_y + \vec{k}\,\omega_z = \vec{\omega}$

Asadar obtinem

$$\vec{\Omega} = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega},$$

ceea ce înseamnă că turbionarea are semnificatie de viteză unghiulară de rotatie.

În final să mai analizăm cazul unui fluid incompresibil $\rho = cst$ și fără vârtejuri (laminar)

Avem

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \text{și} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Din $\nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \nabla \psi$ $\quad \psi$ - potential al vitezelor

și din $\nabla \cdot \vec{v} \Rightarrow \nabla(\nabla \psi) = 0 \Rightarrow \Delta \psi = 0$ - Ec Laplace

(se poate analiza similar cu electrostatica).

3.2.3. Statica fluidelor

În cazul static evident $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0$ și ecuatia Euler are forma simplă

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f}$$

Dacă fluidul se află în câmp gravitational omogen și uniform, $\vec{f} \equiv \vec{g}$, obtinem ecuatia fundamentală a staticii fluidelor

$$\nabla p = \rho \vec{g} \tag{35}$$

Cum în general am văzut că dacă o fortă este potentială (conservativă)

$$\vec{F} = -\nabla V$$

În cazul nostru $\vec{F} = m\vec{g}$ și obtinem

$$m\vec{g} = -\nabla V \Rightarrow \vec{g} = -\frac{1}{m}\nabla V$$

și avem $\quad \nabla p = -\dfrac{\rho}{m}\nabla V \Leftrightarrow \nabla\left(p + \dfrac{\rho}{m}V\right) = 0 \quad (36)$

Să analizăm (35) în două cazuri de fluide

- gazul atmosferic

alegem axa Oz orientată vertical în sus $\overset{(35)}{\Rightarrow}$

$$\vec{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \vec{k} \tag{36}$$

După cum am menționat anterior în studiul fluidelor trebuie determinate câmpurile $p(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$ și $\vec{v}(\vec{r},t)$ (Dar în cazul nostru $\vec{v}(\vec{r},t)=0$)
Pe lângă ecuația Euler, care are acum forma (35) se utilizează ecuația de continuitate.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0$$, care pentru $\vec{v}=0$ are forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{37}$$

În plus mai folosim ecuația termică de stare a gazului perfect (din termodinamică)

$$pV = \nu RT \Leftrightarrow pV = \frac{m}{\mu} RT \Leftrightarrow p\mu = \frac{m}{V} RT \Leftrightarrow p\mu = \rho RT \tag{38}$$

Am văzut că ecuația Euler este echivalentă cu (36)
Am obținut astfel sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ p\mu = \rho RT \end{cases} \tag{39}$$

Pentru rezolvarea acestora mai trebuie cunoscute niște condiții la limită. În cazul nostru presiunea (sau densitatea) la suprafața pământului. Presupunem temperatura T cunoscută și o alegem în caz particular constantă.

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = \rho(x,y,z)$. Din ultima ecuație (39) $\Rightarrow p = p(x,y,z)$. Cum $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ și $\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow p = p(z)$. Din nou ultima ecuație (39) ne arată că $\rho = \rho(z)$. Astfel avem acum sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dz} = -\rho g \\ p\mu = \rho RT \end{cases} \tag{40}$$

$\frac{dp}{dz} = -\frac{p\mu}{RT} g \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$. Prin integrare obținem

$$\ln p = -\frac{\mu g}{RT} z + C \tag{41}$$

Condiția la limită : $p(z=0)=p_0$ conduce la $C=\ln p_0$ și (41) are forma

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{\mu g}{RT} z \iff \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g}{RT} z$$

și în final obținem

$$p(z) = e^{-\frac{\mu g z}{RT}} \qquad (42)$$

Ultima relație se numește formula barometrică.
Din ultima ecuație din (40) avem

$$\rho(z) = \frac{p\mu}{RT} = \frac{p_0\mu}{RT} e^{-\frac{\mu g z}{RT}} = \rho_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}} \qquad (41)$$

- analizăm statica fluidelor în câmp gravitațional (hidrostatica) în cazul fluidelor incompresibile (lichide)

În acest caz $\rho = \text{const}$, fluid incompresibil și nu mai avem nevoie de ecuația de stare termodinamică și nici de ecuația de continuitate.
Alegem acum axa Oz orientată în jos și ecuația Euler (35) se scrie

$$\vec{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \vec{k} \qquad (42)$$

Adică

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \qquad (43)$$

Din primele două ecuații $\Rightarrow p = p(z)$ și ultima ecuație se scrie

$$\frac{dp}{dz} = \rho g \qquad (44)$$

Aceasta se integrează imediat și obținem

$$p = p_0 + \rho g z \quad , \text{cu } p(z=0) = p_0 \qquad (45)$$

Ultima relație ne dă presiunea hidrostatică într-un lichid la adâncimea z, p_0 este presiunea la suprafața lichidului adică presiunea atmosferică

3.2.4. Curgerea laminară. Ecuația lui Bernoulli

Curgerea fiind laminară avem $\nabla \times \vec{v} = 0$

În câmp gravitațional $\vec{f} \equiv \vec{g}$.

Analizăm cazul staționar $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ și în plus presupunem fluidul incompresibil ρ = constant.

Ecuația lui Euler are forma (în aceste condiții) (vezi 3.1)

$$\frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \qquad (45)$$

Cum știm că $m\vec{g} = -\nabla V$ cu $V = -mgz$ (Oz în sus)

$$\vec{g} = -\nabla g z$$

ρ fiind constant $\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$. Cu acestea (45) se scrie

$$\nabla\left(\frac{1}{2} \vec{v}^2\right) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) - \nabla(gz) \qquad (46)$$

sau

$$\nabla\left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \qquad (47)$$

Cum $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ din (47) obținem

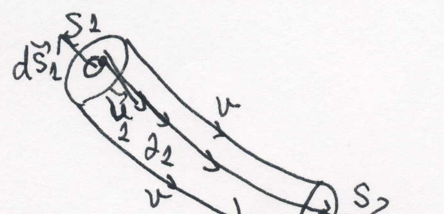
$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constant} \qquad (48)$$

sau

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = \text{constant} \qquad (49)$$

Ultima relație reprezintă ecuația lui Bernoulli.

Utilizăm în continuare și ecuația de continuitate



$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} = 0$; din $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, ρ = cst

obținem $\rho \nabla \vec{v} = 0$

Integrăm ultima ecuație pe volumul V

$$\iiint_V \rho \nabla \vec{v} = 0 \quad \iiint_V (\nabla \rho \vec{v}) = \oiint_\Sigma (\rho \vec{v}) d\vec{S}$$

obținem $\oiint_\Sigma (\rho \vec{v}) d\vec{S} = 0 \Rightarrow -\rho v_1 S_1 + \rho v_2 S_2 = 0$

adică

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad (50)$$

Ultima relație putea fi obținută și direct, adică ținând cont că debitul masic prin S_1 este egal cu debitul masic prin S_2

$$Q_m = \rho S v \quad \text{(cum văzut cum am determinat } Q_m\text{)}$$

$$\Rightarrow Q_m^1 = Q_m^2 \qquad \rho = \text{const} \Rightarrow \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$$

Observații: În ecuația lui Bernoulli

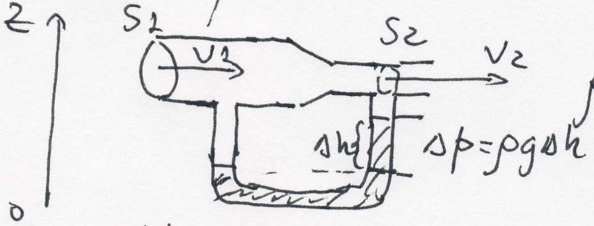
$p_d = \rho \frac{v^2}{2}$ – se numește presiunea dinamică

$p_h = \rho g z$ – se numește presiune hidrostatică

și p – presiune externă.

Aplicații:

– determinarea debitului de curgere a unui fluid – Tubul Venturi



$\Delta p = p_1 - p_2$

Aplicăm ecuația lui Bernoulli

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)$$

Din ecuația de continuitate: $S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$

$$\Rightarrow v_2^2 \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right) = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)$$

și

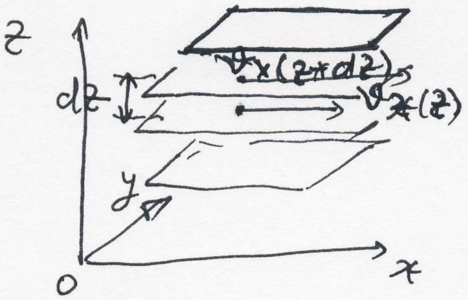
$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right)}}$$

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho} = S_2 v_2 = S_2 \sqrt{\frac{2 S_1^2 S_2^2 (p_1 - p_2)}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}} \qquad (51)$$

3.3. Dinamica fluidelor reale (vâscoase)

Ecuația Navier-Stoekes

În cazul fluidelor vâscoase (reale) apar forțe tangențiale de frecare la alunecarea straturilor de lichide unele față de altele. Aceste forțe se numesc forțe de vâscozitate și le notăm cu $\vec{F}_r$. Să considerăm două suprafețe de lichid care sunt perpendiculare pe Oz și se deplasează în lungul axei Ox. În acest caz apare o forță de



frecare (vâscozitate) care este proporțională cu viteza relativă a straturilor și cu suprafața S de contact a acestora. Această forță are sensul opus vitezei relative a straturilor.

Coeficientul de proporționalitate se notează cu η și se numește coeficient de vâscozitate. Să presupunem că vitezele straturilor cresc în sensul creșterii lui z, adică $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0$, $v_x > 0$.

$$F_{rx} = -\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} S$$

Considerăm $\delta \vec{F}_r\big|_x = dF_{rx} = -\eta\, d\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) S = -\eta \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\, dz\, S$

Dacă alegem un element de suprafață $dx\,dy \equiv dS$ obținem

$$\delta F_{rx} = -\eta \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = -\eta \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\, dV$$

cu $dV = dx\,dy\,dz$. Determinăm acum densitatea volumică de forță de vâscozitate $f_{rx} = \frac{\delta F_{rx}}{dV}$,

$$f_{rx} = -\eta \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (52)$$

Am presupus η constant.

Presupunem acum că suprafețele au fost alese arbitrar în spațiu. În acest caz relația anterioară se extinde și la componentele y și z ale forțelor de vâscozitate, iar vitezele au de asemenea componente după y, z. Obținem astfel următoarele relații.

$$f_{rx} = -\eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \equiv -\eta \nabla^2 v_x = -\eta \Delta v_x \quad (53)$$

$$f_{ry} = -\eta\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \equiv -\eta \nabla^2 v_y = -\eta \Delta v_y \quad (54)$$

$$f_{rz} = -\eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \equiv -\eta \nabla^2 v_z = -\eta \Delta v_z \quad (55)$$

Ultimele trei ecuații scalare se pot restrânge într-o relație vectorială (se înmulțește cu $\vec{i}, \vec{j}$ și $\vec{k}$ și apoi se însumează). Obținem astfel

$$\vec{f}_r = -\eta \nabla^2 \vec{v} = -\eta \Delta \vec{v} \quad (56)$$

Introducem acum și pe $\vec{f}_r$ în ecuațiile de mișcare (ca și în cazul Ecuației Euler)

$$dm \frac{d\vec{v}}{dt} = \delta \vec{f}_p + \delta \vec{f} + \delta \vec{f}_r \quad (57)$$

adică

$$dm \frac{d\vec{v}}{dt} = -dV \nabla p + \vec{f}\, dm + \vec{f}_r\, dV \quad (58)$$

Împărțim prin dm și ținem cont că $\frac{dV}{dm} = \frac{1}{\rho}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} + \frac{1}{\rho} \vec{f}_r \quad (59)$$

Am văzut că $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ și ținând de cont de (56) obținem

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} - \frac{\eta}{\rho}\Delta \vec{v} \quad (60)$$

Ecuația de mai sus se numește ecuația Navier-Stokes și reprezintă ecuația de mișcare pentru fluidele vâscoase. Ca și în cazul ec. Euler ~~ec~~ (60) mai poate fi scrisă și astfel

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \vec{v}^2 - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} - \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} \quad (61)$$